مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

فصل دوم

قضیه تالس و تشابه

مدرس: سیدابوذر حسینی

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

* نسبت و تناسب

تعریف: نسبت عدد a به عدد $b\neq 0$ عبارت است از کسر $\frac{a}{b}$

تساوی بین دو نسبت $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ یک **تناسب** نامیده می‌شود: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

☑ مثال: **در تناسب‌های زیر، مقدار x و y را بیابید.**

الف) $\frac{x}{x+2}=\frac{3}{4} \xrightarrow{\text{طرفین-وسطین}} 4x=3x+6 \to x=6$

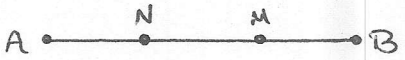
ب) $\frac{3}{y}=\frac{y}{27} \xrightarrow{\text{"}\quad\text{"}} y^2=3\times 27=81 \to y=\pm 9$

نکته: در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ ، عدد b، **میانگین هندسی** دو عدد a و c نامیده می‌شود و مقدار آن از رابطه‌ی $b^2=ac$ به‌دست می‌آید.

☑ مثال: **میانگین هندسی دو عدد ۴ و ۲۵ را بیابید.**

$b^2=4\times 25=100 \to b=\pm 10$

☑ تست: **روی پاره‌خط $AB=12$ ، دو نقطه‌ی M و N را چنان انتخاب می‌کنیم که $\frac{AM}{MB}=\frac{BN}{AN}=2$ ، در این صورت طول پاره‌خط MN کدام است؟**



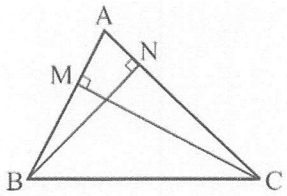
$\frac{AM}{MB}=2 \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AM}{AB}=\frac{2}{3} \to AM=8$

$\frac{BN}{AN}=2 \xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}} \frac{AB}{AN}=3 \to AN=4$

$\to MN=AM-AN=4$

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ✓ ۴) ۸

☑ مثال: **با توجه به شکل مقابل، جاهای خالی را پر کنید.**



الف) اگر AB را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می‌شود:

$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\times CM$

ب) اگر AC را به عنوان قاعده در نظر بگیریم، مساحت مثلث می‌شود:

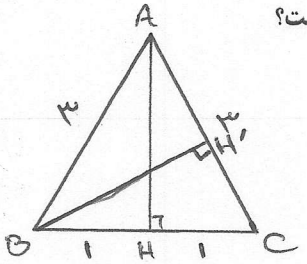
$S_{ABC}=\frac{1}{2}AC\times BN$

پ) از (الف) و (ب) داریم:

$AB\times CM=AC\times BN \Rightarrow \frac{AB}{AC}=\frac{BN}{CM}$

نتیجه: در هر مثلث، نسبت اندازه‌های هر دو ضلع، با عکس نسبت ارتفاع‌های وارد بر آن‌ها برابر است.

☑ تست: **اگر طول اضلاع مثلثی ۲ و ۳ و ۳ سانتی‌متر باشد، طول ارتفاع وارد بر ساق مثلث چند سانتی‌متر است؟**



ابتدا ارتفاع AH را رسم می‌کنیم:

$\triangle ABH: AH^2+1^2=3^2 \to AH^2=8 \to AH=\sqrt{8}$

حال اگر ارتفاع BH' را رسم کنیم، طبق نتیجه فوق داریم:

$AH\times BC=BH'\times AC$

$\sqrt{8}\times 2=BH'\times 3 \to BH'=\frac{2\sqrt{8}}{3}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

۱) $\frac{4\sqrt{2}}{3}$ ✓ ۲) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{2}$ ۴) $\sqrt{3}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

ویژگی‌های تناسب:

۱) در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ با عمل طرفین-وسطین تساوی $ad=bc$ را خواهیم داشت.

۲) در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان کسرها را معکوس کرد و تناسب $\frac{b}{a}=\frac{d}{c}$ را به‌دست آورد.

۳) در تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ می‌توان جای دو جمله‌ی میانی را عوض کرد و تناسب $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ را به‌دست آورد.

۴) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d} & \text{ترکیب در صورت} \\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d} & \text{ترکیب در مخرج} \end{cases}$

۵) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow \begin{cases} \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d} & \text{تفضیل در صورت} \\ \frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d} & \text{تفضیل در مخرج} \end{cases}$

۶) $\begin{cases} \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \\ \frac{c}{d}=\frac{e}{f} \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$

۷) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k \rightarrow \begin{cases} \frac{a+c}{b+d}=k \\ \frac{a+c+e}{b+d+f}=k \end{cases}$

☑ تست: اگر $\frac{x-y}{2x+y}=\frac{2}{5}$ باشد، $\frac{x}{y}$ کدام است؟

۱) ۷ ✓ ۲) $\frac{7}{2}$ ۳) $\frac{5}{2}$ ۴) $\frac{5}{3}$

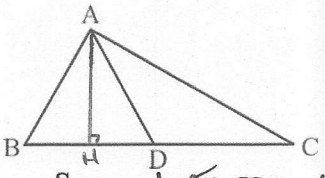
$\frac{x-y}{2x+y}=\frac{2}{5} \xrightarrow{\text{طرفین-وسطین}} 5x-5y=4x+2y$

$\rightarrow 5x-4x=5y+2y \rightarrow x=7y \rightarrow \frac{x}{y}=7$

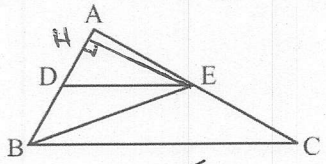
☑ مثال: اگر $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}=5$ باشد، مقدار $\frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'}$ را بیابید.

$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'} \xrightarrow{\text{بدیهی}} \frac{2a}{2a'}=\frac{3b}{3b'}=\frac{-4c}{-4c'}=5 \xrightarrow{\text{ویژگی ۷ تناسب}} \frac{2a+3b-4c}{2a'+3b'-4c'}=5$

☑ مثال: در شکل‌های زیر، نسبت مساحت دو مثلث خواسته شده را بنویسید.



$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}AH\times BD}{\cancel{\frac{1}{2}}AH\times CD}=\frac{BD}{CD}$

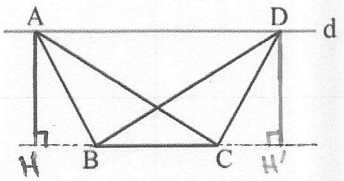


$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}}EH\times AD}{\cancel{\frac{1}{2}}EH\times DB}=\frac{AD}{DB}$

نتیجه‌ی ۱: هرگاه اندازه‌های ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت **مساحت‌های** آن‌ها برابر است با نسبت **قاعده‌های** نظیر آن ارتفاع‌ها.

نتیجه‌ی ۲: اگر دو مثلث یک رأس مشترک داشته باشند و قاعده‌ی مقابل به این رأس در دو مثلث روی یک خط راست قرار داشته باشد، نسبت **مساحت‌های** آن‌ها برابر است با نسبت **قاعده‌های** آن‌ها.

☑ مثال: در شکل مقابل، $d \parallel BC$ است. نشان دهید: $S_{ABC}=S_{DBC}$.



$S_{ABC}=\frac{1}{2}BC\times AH$

$S_{DBC}=\frac{1}{2}BC\times DH'$

$\xrightarrow[AH=DH']{\text{فاصله دو خط موازی برابر}} S_{ABC}=S_{DBC}$

نتیجه: اگر دو مثلث، قاعده‌ی مشترک داشته باشند و رأس‌های روبه‌روی این قاعده‌ی مشترک، روی یک خط موازی این قاعده باشند، مثلث‌ها هم‌مساحت‌اند.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

تمرین [صفحه ۳۳ کتاب]:

۱- اگر $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\frac{3}{5}$ باشد، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{6}=\frac{3}{5} \xrightarrow{\text{ویژگی تناسب}} \frac{x+y+z}{\underbrace{2+3+6}_{11}}=\frac{3}{5} \to x+y+z=\frac{3\times 11}{5}=\frac{33}{5}$$

۲- طول پاره خطی را به دست آورید که واسطه‌ی هندسی بین دو پاره خط به طول های ۸ و ۱۰ سانتی متر است.

$$b^2=8\times 10=80 \to b=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$$

۳- طول‌های اضلاع مثلثی ۴ و ۶ و ۸ سانتی‌مترند و بلندترین ارتفاع آن $\frac{3\sqrt{15}}{2}$ سانتی متر است .طول‌های دو ارتفاع دیگر مثلث را به دست آورید.

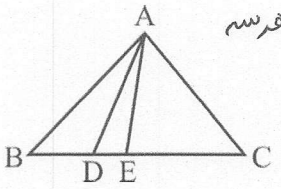
بلندترین ارتفاع بر کوتاه‌ترین ضلع وارد می‌شود:

$$h_2=\sqrt{15}$$

$$S=\frac{1}{2}\times 4\times\frac{3\sqrt{15}}{2}=\frac{1}{2}\times 6\times h_2=\frac{1}{2}\times 8\times h_3$$

$$h_3=\frac{6\sqrt{15}}{8}=\frac{3\sqrt{15}}{4}$$

۴- در شکل مقابل، مساحت مثلث ACE سه برابر مساحت مثلث ADE و دو برابر مساحت مثلث ABD است. نسبت‌های $\frac{DE}{BD}$ و $\frac{BC}{DE}$ را به دست آورید.



قاعده‌های هر سه مثلث روی یک خط بوده و رأس A در هر سه مشترک است، پس نسبت مساحت‌ها، برابر نسبت قاعده‌ها است.

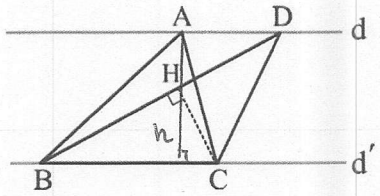
$$\frac{S_{ACE}}{S_{ADE}}=3 \to \frac{EC}{DE}=3 \to DE=\frac{1}{3}EC$$

$$\frac{S_{ACE}}{S_{ABD}}=2 \to \frac{EC}{BD}=2 \to BD=\frac{1}{2}EC$$

$$\to \frac{DE}{BD}=\frac{\frac{1}{3}\cancel{EC}}{\frac{1}{2}\cancel{EC}}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{DE}=\frac{BD+DE+EC}{DE}=\frac{\frac{1}{2}EC+\frac{1}{3}EC+EC}{\frac{1}{3}EC}=\frac{\frac{11}{6}\cancel{EC}}{\frac{1}{3}\cancel{EC}}=\frac{11}{2}$$

۵- در شکل مقابل، $d \parallel d'$ و مساحت مثلث ABC برابر $8cm^2$ است. اگر $BD=6cm$ باشد، فاصله‌ی نقطه‌ی C از BD را به دست آورید.



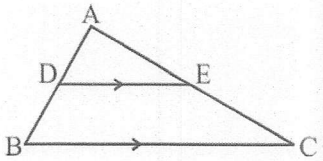
$$\underbrace{S_{ABC}}_{8}=S_{DBC}=\frac{1}{2}BC\times h \to S_{DBC}=8$$

$$\to \frac{1}{2}\underbrace{BD}_{6}\times CH=8 \to 3CH=8 \to CH=\frac{8}{3}$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

* قضیه‌ی تالس

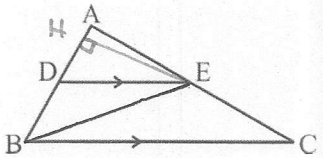


قضیه: در مثلث ABC شکل مقابل، اگر پاره‌خط DE موازی BC رسم شود، آنگاه پاره‌خط‌های ایجاد شده روی AB و AC با یکدیگر متناسب‌اند:

فرض : $DE \parallel BC$

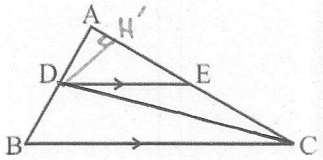
حکم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \longrightarrow$ جزء به جزء

اثبات: مرحله اول: از E به B وصل می‌کنیم:



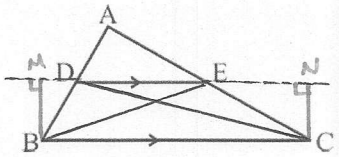
$$\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}EH}\times AD}{\cancel{\frac{1}{2}EH}\times DB}=\frac{AD}{DB} \quad (1)$$

مرحله دوم: از D به C وصل می‌کنیم:



$$\frac{S_{ADE}}{S_{CDE}}=\frac{\cancel{\frac{1}{2}DH'}\times AE}{\cancel{\frac{1}{2}DH'}\times EC}=\frac{AE}{EC} \quad (2)$$

مرحله سوم: حال باید نشان دهیم: $S_{BDE}=S_{CDE}$



$S_{BDE}=\frac{1}{2}DE\times BM$

$S_{CDE}=\frac{1}{2}DE\times CN$

$\xrightarrow[\text{فاصله دو خط موازی برابر}]{BM=CN} S_{BDE}=S_{CDE} \quad (3)$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \begin{cases} \frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}=\frac{AD}{DB} \\ \frac{S_{ADE}}{\boxed{S_{CDE}}}=\frac{AE}{EC} \quad S_{BDE} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}}$$

جزء به جزء

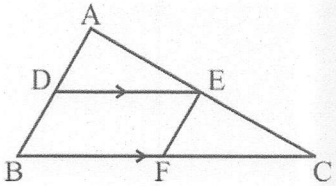
** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

نتیجه‌ی ۱:

$\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC} \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{AD}{AD+DB}=\frac{AE}{AE+EC} \rightarrow \boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}}$ جزء به کل از بالا

نتیجه‌ی ۲ (تعمیم قضیه‌ی تالس):



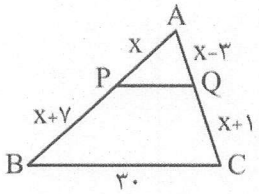
$$\boxed{\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}=\frac{DE}{BC}}$$

برهان: مطابق شکل، از نقطه‌ی E، پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم،

$\begin{cases} DE \parallel BF \\ DB \parallel EF \end{cases} \rightarrow$ متوازی‌الاضلاع $DEFB \rightarrow DE=BF$

$EF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل از طرفین}} \frac{\overset{DE}{\boxed{BF}}}{BC}=\frac{AE}{AC} \rightarrow \frac{DE}{BC}=\frac{AE}{AC}$

☑ مثال: در شکل مقابل، $PQ \parallel BC$ است؛



الف) مقدار x را بیابید.

$PQ \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC} \rightarrow \frac{x}{x+۷}=\frac{x-۳}{x+۱}$

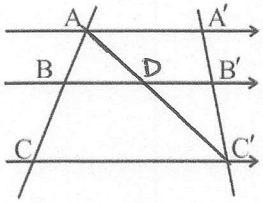
$\rightarrow x(x+۱)=(x-۳)(x+۷) \rightarrow \cancel{x^۲}+x=\cancel{x^۲}+۴x-۲۱$

$\rightarrow x-۴x=-۲۱ \rightarrow -۳x=-۲۱ \rightarrow x=۷$

ب) طول PQ را بیابید.

جزء به کل: $\frac{PQ}{\underset{۳۰}{BC}}=\frac{\overset{۷}{AP}}{\underset{۷+۱۴}{AB}} \rightarrow \frac{PQ}{۳۰}=\frac{\overset{۱}{\cancel{۷}}}{\underset{۳}{\cancel{۲۱}}} \rightarrow PQ=۱۰$

☑ تست: در شکل مقابل می‌دانیم $AB=۱۶$ و $BC=۲۴$ و $A'C'=۳۰$، طول $A'B'$ چقدر است؟



۱) ۱۲ ✓
۲) ۲۰
۳) ۱۶
۴) ۱۰

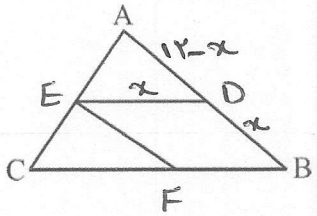
برهان: از A به C وصل می‌کنیم:

$\overset{\triangle}{ACC'}: \frac{AB}{BC}=\frac{AD}{DC'}$

$\overset{\triangle}{AA'C'}: \frac{A'B'}{B'C'}=\frac{AD}{DC'}$

$\Rightarrow \frac{\overset{۲}{\cancel{۱۶}}}{\underset{۳}{\cancel{۲۴}}}=\frac{A'B'}{۳۰-A'B'} \rightarrow ۶۰-۲A'B'=۳A'B' \rightarrow ۵A'B'=۶۰ \rightarrow A'B'=۱۲$

☑ تست: در شکل مقابل، یک لوزی در مثلث ABC محاط شده است به طوری که B، رأس لوزی و دو ضلع مجاور آن روی AB و BC قرار دارد. اگر $AB=۱۲$ و $BC=۱۸$ و $AC=۹$ باشد، طول ضلع لوزی کدام است؟



۱) ۷
۲) ۶
۳) $\frac{۳۶}{۵}$ ✓
۴) $\frac{۳۴}{۵}$

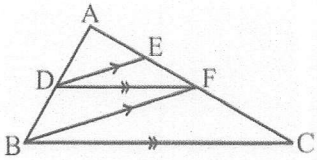
ضلع لوزی را x می‌گیریم:

جزء به کل: $\frac{\overset{x}{DE}}{\underset{۳}{\cancel{۱۸}}}=\frac{\overset{۱۲-x}{AD}}{\underset{۲}{\cancel{۱۲}}} \rightarrow ۲x=۳۶-۳x \rightarrow ۵x=۳۶ \rightarrow x=\frac{۳۶}{۵}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

☑ مثال مهم: در شکل مقابل، $DE \parallel BF$ و $DF \parallel BC$ است؛



الف) ثابت کنید: $\frac{AE}{EF}=\frac{AF}{FC}$

$\triangle ABF: DE \parallel BF \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EF}$

$\triangle ABC: DF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{AD}{DB}=\frac{AF}{FC}$

$\Rightarrow \frac{AE}{EF}=\frac{AF}{FC}$

ب) ثابت کنید: $AF^2=AE\times AC$. (AF میانگین هندسی AE و AC است)

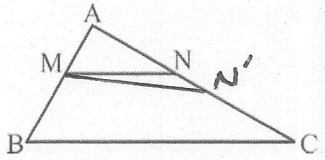
جزء به کل:

$\triangle ABF: \frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AF}$

$\triangle ABC: \frac{AD}{AB}=\frac{AF}{AC}$

$\Rightarrow \frac{AE}{AF}=\frac{AF}{AC} \rightarrow AF^2=AE\times AC$

عکس قضیه‌ی تالس:

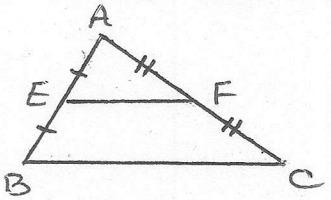


در مثلث ABC، اگر نقاط M و N روی اضلاع AB و AC طوری انتخاب شوند که تناسب $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$ برقرار باشد، آنگاه $MN \parallel BC$ است. اثبات با برهان خلف: فرض می‌کنیم MN موازی BC نیست. پس پاره‌خطی مانند MN' موازی BC وجود دارد:

$MN' \parallel BC \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN'}{AC} \xrightarrow{\text{فرض: } \frac{AN}{AB}=\frac{AN}{AC}} AN'=AN$ غیرممکن

پس فرض خلف (نقیض حکم) نادرست بوده و درستی حکم یعنی موازی بودن MN با BC ثابت می‌شود.

☑ مثال مهم (قضیه‌ی میان خط مثلث): ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل می‌کند، **موازی** و **نصف** ضلع سوم است.



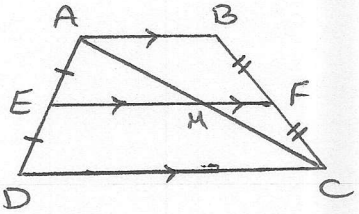
ف: $\begin{cases} AE=EB \\ AF=FC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} EF \parallel BC \\ EF=\frac{BC}{2} \end{cases}$

$\frac{AE}{EB}=\frac{AF}{FC}=1 \xrightarrow{\text{طبق عکس تالس}} EF \parallel BC$

$EF \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{EF}{BC}=\frac{AE}{AB}=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{EF}{BC}=\frac{1}{2}$

$\rightarrow EF=\frac{BC}{2}$

☑ مثال مهم (قضیه‌ی میان خط ذوزنقه): ثابت کنید پاره‌خطی که وسط‌های دو ساق ذوزنقه را به هم وصل می‌کند، **موازی** و **نصف** مجموع دو قاعده است.



ف: $\begin{cases} AE=ED \\ BF=FC \end{cases}$ ح: $\begin{cases} EF \parallel AB \text{ و } CD \\ EF=\frac{AB+CD}{2} \end{cases}$

با فرض اثبات قسمت اول حکم، قسمت دوم را فقط اثبات می‌کنیم:

$\triangle ADC: EM \parallel DC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{EM}{DC}=\frac{AE}{AD}=\frac{1}{2} \rightarrow EM=\frac{DC}{2}$

$\triangle ABC: MF \parallel AB \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{MF}{AB}=\frac{CF}{CB}=\frac{1}{2} \rightarrow MF=\frac{AB}{2}$

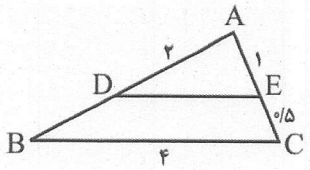
$EF=EM+MF=\frac{DC}{2}+\frac{AB}{2} \rightarrow EF=\frac{AB+CD}{2}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

تمرین [صفحه ۳۶ کتاب]:

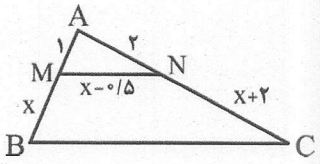
۱- در شکل مقابل DE||BC است. با توجه به اندازه‌ی پاره‌خط‌ها طول‌های DE و AB را به‌دست آورید.



جزء به کل: $\frac{AE}{AC}=\frac{AD}{AB}=\frac{DE}{BC} \to \frac{۱}{۱/۵}=\frac{۲}{AB}=\frac{DE}{۴} \to DE=\frac{۴}{۱/۵}$

$AB=۳$ $\to DE=\frac{۸}{۳}$

۲- در شکل مقابل، اگر MN||BC باشد، مقدار x را به دست آورید و سپس طول BC را نیز بیابید.

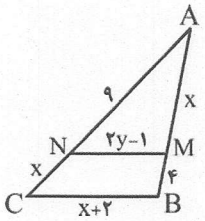


جزء به جزء: $\frac{۱}{x}=\frac{۲}{x+۲} \to ۲x=x+۲ \to x=۲$

جزء به کل: $\frac{x-۰/۵}{BC}=\frac{۱}{۱+x} \to \frac{۱/۵}{BC}=\frac{۱}{۳} \to BC=۳\times ۱/۵$

$\to BC=۴/۵$

۳- در شکل مقابل MN||BC است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.

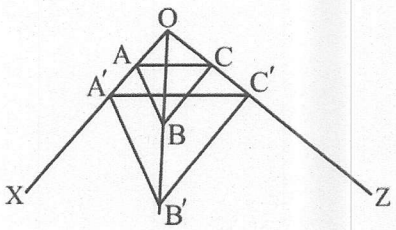


جزء به جزء: $\frac{AN}{NC}=\frac{AM}{MB} \to \frac{۹}{x}=\frac{x}{۴} \to x^۲=۳۶ \to x=۶$

جزء به کل: $\frac{MN}{BC}=\frac{AM}{AB} \to \frac{۲y-۱}{x+۲}=\frac{x}{x+۴} \to \frac{۲y-۱}{۸}=\frac{\cancel{۶}^{۳}}{\cancel{۱۰}_{۵}}$

$\to ۱۰y-۵=۲۴ \to ۱۰y=۲۹ \to y=\frac{۲۹}{۱۰}$

۴- در شکل مقابل می‌دانیم AB||A'B' و BC||B'C' است. با استفاده از قضیه‌ی تالس و عکس آن ثابت کنید: AC||A'C'



$\overset{\triangle}{OA'B'}: AB \parallel A'B' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OA}{AA'}=\frac{OB}{BB'}$

$\overset{\triangle}{OB'C'}: BC \parallel B'C' \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{OC}{CC'}=\frac{OB}{BB'}$

$\to \frac{OA}{AA'}=\frac{OC}{CC'}$

$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} \overset{\triangle}{OA'C'}: AC \parallel A'C'$

۵- در متن جزوه حل شد.

۶- در کتاب حل شود.

۷- در متن جزوه حل شد.

۸- در کتاب حل شود.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

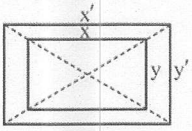
مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

* تشابه

تعریف: دو چندضلعی را متشابه گوییم هرگاه زوایای نظیرشان با هم برابر بوده و اضلاع نظیرشان با هم متناسب باشند.

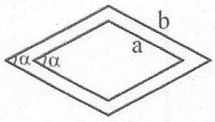
نتیجه‌ی ۱: دو nضلعی منتظم همواره با یکدیگر متشابه‌اند.

نتیجه‌ی ۲: دو مستطیل زاویه‌هایشان همواره برابر است، لذا اگر نسبت طول به عرضشان نیز برابر باشد، متشابه‌اند.



$\frac{x}{y}=\frac{x'}{y'} \Rightarrow$ دو مستطیل متشابه‌اند

نتیجه‌ی ۳: دو لوزی اضلاعشان همواره متناسب است، پس اگر یک زاویه‌ی برابر داشته باشند، متشابه‌اند.

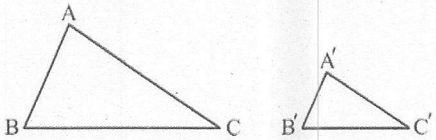


☑ تست: **کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح می‌باشد؟**

۱) دو مستطیل همواره متشابه‌اند.
۲) دو مثلث قائم‌الزاویه همواره متشابه‌اند.
۳) ✓ دو مثلث متساوی‌الاضلاع همواره متشابه‌اند.
۴) دو لوزی همواره متشابه‌اند.

مثلث‌های متشابه:

هرگاه زوایای دو مثلث نظیر به نظیر با هم برابر و اضلاع نظیر، متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

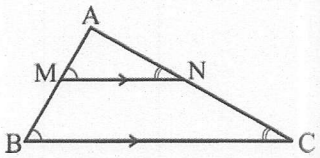


$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases},\ \frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=k \Leftrightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

k را **نسبت تشابه** دو مثلث می‌نامیم.

قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خط راستی موازی یکی از اضلاع مثلثی، دو ضلع دیگر را در دو نقطه قطع کند، مثلثی با آنها تشکیل می‌دهد که با مثلث اصلی متشابه است.



$$MN \parallel BC \Rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{ABC}$$

اثبات:

$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } AB} \hat{M}=\hat{B}$ (۱)

$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{N}=\hat{C}$ (۲)

$MN \parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$ (۳)

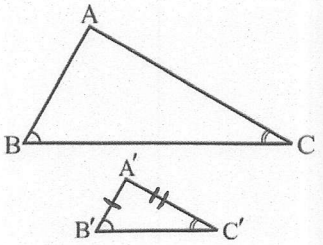
(۱)، (۲) و (۳) $\Rightarrow \overset{\Delta}{AMN}\sim \overset{\Delta}{ABC}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

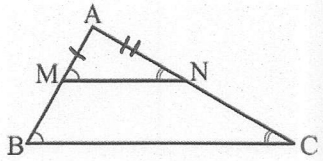
حال با توجه به قضیه‌ی اساسی تشابه مثلث‌ها، سه حالت مختلف تشابه مثلث‌ها را بیان و اثبات می‌کنیم. راهبرد اصلی ما برای اثبات این سه قضیه این است که روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا کرده و ثابت می‌کنیم که MN موازی BC است.

حالات تشابه دو مثلث



۱– هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}'\\ \hat{C}=\hat{C}'\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$



اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم:

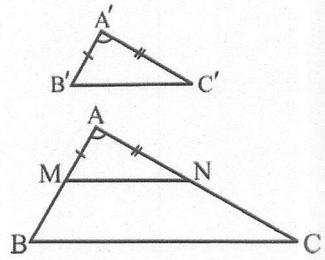
$$\begin{cases}\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180\\ \hat{A}'+\hat{B}'+\hat{C}'=180\end{cases}\xrightarrow[C=C']{B=B'}\hat{A}=\hat{A}' \quad (1)$$

$$\begin{cases}AM=A'B' & \text{طبق برهان}\\ \hat{A}=\hat{A}' & (1)\text{ طبق}\\ AN=A'C' & \text{طبق برهان}\end{cases}\xrightarrow{(ض ز ض)}\overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}\xrightarrow{(2)}\begin{cases}\hat{M}=\hat{B}' & (3)\\ \hat{N}=\hat{C}'\\ MN=B'C'\end{cases}$$

$$\begin{cases}\hat{B}=\hat{B}' & \text{طبق فرض}\\ \hat{M}=\hat{B}' & (3)\text{ طبق}\end{cases}\Rightarrow\hat{M}=\hat{B}\xrightarrow[\text{موازی و مورب}]{\text{عکس قضیه خطوط}}MN\parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}}\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\xRightarrow{(2)}\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

۲– هرگاه دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه‌ی بین این دو ضلع در دو مثلث برابر باشد، دو مثلث متشابه‌اند.



$$\begin{cases}\hat{A}=\hat{A}'\\ \dfrac{A'B'}{AB}=\dfrac{A'C'}{AC}\end{cases}\Rightarrow\overset{\Delta}{ABC}\sim\overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم:

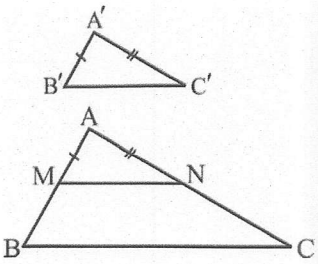
$$\begin{cases}AM=A'B'\\ \hat{A}=\hat{A}'\\ AN=A'C'\end{cases}\xrightarrow{(ض ز ض)}\overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}\quad(1)$$

$$\text{طبق فرض داریم}:\ \frac{\overset{AM}{A'B'}}{AB}=\frac{\overset{AN}{A'C'}}{AC}\longrightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}\xrightarrow{\text{عکس تالس}}MN\parallel BC$$

$$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}}\overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}\xRightarrow{(1)}\overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir



۳– هرگاه اضلاع دو مثلث نظیر به نظیر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}\Rightarrow \overset{\Delta}{ABC}\sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

اثبات: روی ضلع‌های AB و AC، پاره‌خط‌های AM و AN را به ترتیب به اندازه‌ی $A'B'$ و $A'C'$ جدا می‌کنیم:

طبق فرض داریم: $\frac{\overset{AM}{A'B'}}{AB}=\frac{\overset{AN}{A'C'}}{AC} \rightarrow \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC} \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC$

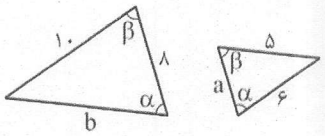
$\xrightarrow{\text{طبق قضیه اساسی تشابه}} \overset{\Delta}{AMN}\sim\overset{\Delta}{ABC}$ (۱)

$\overset{\Delta}{ABC}: MN\parallel BC \xrightarrow{\text{جزء به کل}} \frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC} \xrightarrow{\text{فرض: } \frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}}$

$MN=B'C' \Rightarrow \begin{cases} MN=B'C' \\ AM=A'B' \\ AN=A'C' \end{cases} \xrightarrow{(ض ض ض)} \overset{\Delta}{AMN}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$ (۲)

(۱) و (۲) $\Rightarrow \overset{\Delta}{A'B'C'}\sim\overset{\Delta}{ABC}$

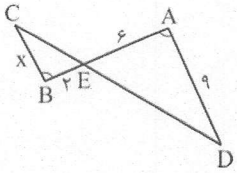
نکته: در دو مثلث متشابه، ضلع‌های متناسب، روبه‌رو به زاویه‌های برابرند.



☑ تست: دو مثلث مقابل متشابه‌اند. $a+b$ کدام است؟

$\frac{۸}{a}=\frac{۱۰}{۵}=\frac{b}{۶}$ (α، β) $\rightarrow \begin{cases} a=۴ \\ b=۱۲ \end{cases} \rightarrow a+b=۱۶$

۱) ۱۶ ✓ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸



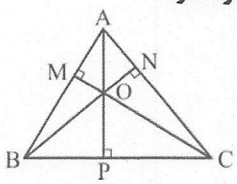
☑ تست: در شکل مقابل، $\hat{A}=\hat{B}$ است. اندازه‌ی پاره‌خط BC کدام است؟

$\begin{cases} \hat{A}=\hat{B} \\ \hat{E}_1=\hat{E}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{AED}\sim\overset{\Delta}{BEC} \rightarrow \frac{AE}{EB}=\frac{AD}{BC}$

$\rightarrow \frac{۶}{۲}=\frac{۹}{x} \rightarrow x=۳$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۴

☑ تست: در شکل مقابل، M و N و P پای ارتفاع‌های مثلث ABC می‌باشند. چند مثلث متشابه با مثلث AOM وجود دارد؟



$\overset{\Delta}{AOM}\sim\overset{\Delta}{OPC}\sim\overset{\Delta}{ABP}\sim\overset{\Delta}{CBM}$

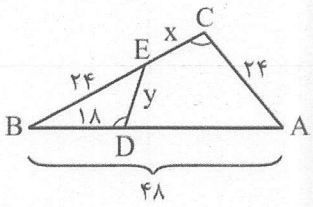
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ✓ ۴) ۵

☑ تست: طول اضلاع یک مثلث ۳ و ۴ و ۶ می‌باشد. این مثلث با مثلثی با کدام طول اضلاع متشابه است؟

۱) ۸ و ۶ و ۶ ۲) ۱۹ و ۸ و ۱۸ ۳) ۴/۵ و ۹ و ۶ ✓ ۴) ۷/۵ و ۱۰ و ۱۲

$\frac{۳}{۴/۵}=\frac{۴}{۶}=\frac{۶}{۹}$

☑ مثال: در شکل مقابل، $\hat{C}=\hat{D}$ می‌باشد. x و y را بیابید.



$\begin{cases} \hat{C}=\hat{D} \\ \hat{B}=\hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\Delta}{BDE}\sim\overset{\Delta}{ABC} \rightarrow \frac{BE}{AB}=\frac{BD}{BC}=\frac{DE}{AC}$

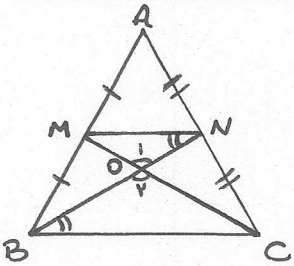
$\rightarrow \frac{\cancel{۲۴}^{1}}{\cancel{۴۸}_{2}}=\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{y}{۲۴}$

$\frac{۱۸}{x+۲۴}=\frac{1}{2} \rightarrow x=۱۲$

$\frac{y}{۲۴}=\frac{1}{2} \rightarrow y=۱۲$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

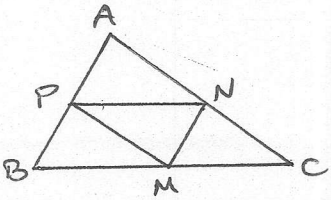
مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir



☑ مثال: در شکل مقابل، BN و CM دو میانه‌ی مثلث ABC می‌باشند. نشان دهید: $\overset{\triangle}{OMN} \sim \overset{\triangle}{OBC}$

$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} = 1 \xrightarrow{\text{عکس تالس}} MN \parallel BC \xrightarrow{\text{هورب } BN} \hat{N} = \hat{B}$

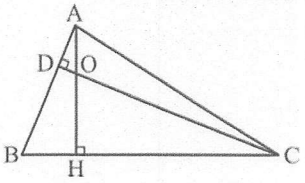
$\begin{cases} \hat{N} = \hat{B} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{OMN} \sim \overset{\triangle}{OBC}$



☑ مثال: وسط‌های اضلاع مثلث ABC را M و N و P می‌نامیم. نشان دهید: $\overset{\triangle}{MNP} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

MN ، MP و NP میان خط‌های مثلث ABC می‌باشند، لذا داریم:

$\begin{cases} MN = \frac{1}{2}AB \\ MP = \frac{1}{2}AC \\ NP = \frac{1}{2}BC \end{cases} \longrightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC} = \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{سه ضلع}]{\text{تناسب}} \overset{\triangle}{MNP} \sim \overset{\triangle}{ABC}$

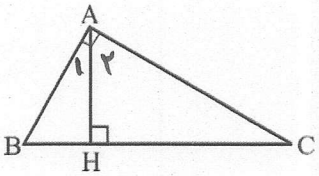


☑ تست: در شکل مقابل، AH و CD دو ارتفاع مثلث ABC هستند. اگر $\frac{1}{3}OH = AD = 5DO$ ، ۱۲ = ، طول HC کدام است؟

$\begin{cases} O_1 = O_2 \\ H = D = 90 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{AOD} \sim \overset{\triangle}{COH} \longrightarrow \frac{AO}{CO} = \frac{AD^{12}}{CH} = \frac{OD^{12/5}}{OH_{36}}$

$\longrightarrow \frac{12}{HC} = \frac{\frac{12}{5}}{36} \longrightarrow \frac{1}{HC} = \frac{1}{5 \times 36} \longrightarrow HC = 180$

۱) ۱۶۵
۲) ۱۷۰
۳) ۱۷۵
۴) ۱۸۰ ✓



☑ مثال مهم (روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه): در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC شکل مقابل،

الف) ثابت کنید دو مثلث ABH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AB^2 = BH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90 \\ \hat{B} = \hat{B} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \longrightarrow \frac{AH}{AC} = \underbrace{\frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}}_{AB^2 = BH \times BC}$

ب) ثابت کنید دو مثلث ACH و ABC متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AC^2 = CH \times BC$

$\begin{cases} \hat{A} = \hat{H} = 90 \\ \hat{C} = \hat{C} \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \longrightarrow \frac{AH}{AB} = \underbrace{\frac{CH}{AC} = \frac{AC}{BC}}_{AC^2 = CH \times BC}$

پ) با استفاده از دو قسمت (الف) و (ب) قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

$\begin{cases} AB^2 = BH \times BC \\ AC^2 = CH \times BC \end{cases} \xrightarrow{(+)} AB^2 + AC^2 = \underbrace{BH \times BC + CH \times BC}_{BC \times \underbrace{(BH + CH)}_{BC}} = BC^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

ت) ثابت کنید دو مثلث ABH و ACH متشابه‌اند و با استفاده از آن ثابت کنید: $AH^2 = BH \times CH$. (AH واسطه هندسی بین BH و CH است)

$\overset{\triangle}{ABH}: \hat{A}_1 + \hat{B} = 90 \xrightarrow{A_1 + A_2 = 90} \hat{A}_2 = \hat{B}$

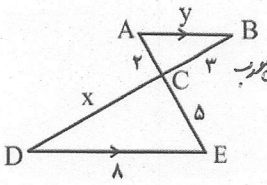
$\begin{cases} \hat{A}_2 = \hat{B} \\ \hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90 \end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \longrightarrow \frac{AB}{AC} = \underbrace{\frac{AH}{CH} = \frac{BH}{AH}}_{AH^2 = BH \times CH}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

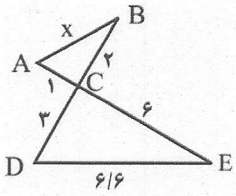
تمرین [صفحه ۴۲ کتاب] :

۱- در هر یک از شکل‌های زیر، تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و از آنجا مقادیر x و y را مشخص کنید.



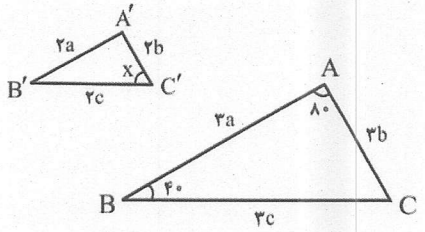
$\hat{C}_1=\hat{C}_2$ ، $\hat{B}=\hat{D}$ موازی مورب $\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CDE} \rightarrow \underbrace{\frac{۲}{۵}=\frac{۳}{x}}_{\text{ت}} = \frac{y}{۸} \rightarrow ۵y=۱۶ \rightarrow y=\frac{۱۶}{۵}$

$x=\frac{۱۵}{۲}$



$\begin{cases}\hat{C}_1=\hat{C}_2\\ \hat{A}=\hat{D}\end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{CDE} \rightarrow \frac{۱}{۳}=\underbrace{\frac{۲}{۶}=\frac{x}{۶,۶}}_{\text{ت}}$

$x=۲,۲$

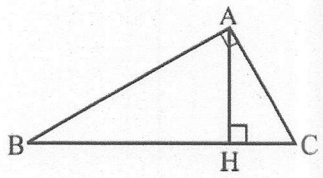


$\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲b}{۳b}=\frac{۲c}{۳c} \xrightarrow[\text{ضلع}]{\text{تناسب}} \overset{\triangle}{A'B'C'} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \hat{C'}=\hat{C}$

$۴۰+۸۰+\hat{C}=۱۸۰ \rightarrow \hat{C}=۶۰^\circ$

$x=۶۰$

۲- در مثلث قائم‌الزاویه شکل مقابل، به کمک روابط طولی، مقادیر مجهول را محاسبه کنید.



۱) BH=۹ , CH=۴ , AH=? , AB=? , AC=?

$AH^2=BH\times CH=۹\times۴=۳۶ \rightarrow AH=۶$

$AB^2=BH\times BC=۹\times(۹+۴)=۹\times۱۳ \rightarrow AB=۳\sqrt{۱۳}$

$AC^2=CH\times BC=۴\times۱۳ \rightarrow AC=۲\sqrt{۱۳}$

۲) AB=۱۰ , BC=۱۲ , AC=? , AH=?

$AB^2+AC^2=BC^2 \rightarrow ۱۰^2+AC^2=۱۲^2 \rightarrow AC^2=۱۴۴-۱۰۰=۴۴ \rightarrow AC=\sqrt{۴۴}=۲\sqrt{۱۱}$

$AC^2=CH\times BC \rightarrow ۴۴=CH\times۱۲ \rightarrow CH=\frac{۴۴}{۱۲}=\frac{۱۱}{۳}$

$AH^2+CH^2=AC^2 \rightarrow AH^2+(\frac{۱۱}{۳})^2=۴۴ \rightarrow AH=\frac{۵\sqrt{۱۱}}{۳}$

۳) AB=۸ , AC=۶ , BH=? , CH=?

$AB^2+AC^2=BC^2 \rightarrow ۸^2+۶^2=BC^2 \rightarrow BC=۱۰$

$AB^2=BH\times BC \rightarrow ۸^2=BH\times۱۰ \rightarrow BH=\frac{۶۴}{۱۰}$

$AC^2=CH\times BC \rightarrow ۶^2=CH\times۱۰ \rightarrow CH=\frac{۳۶}{۱۰}$

۴) AB=۸ , AH=۴ , BC=? , AC=?

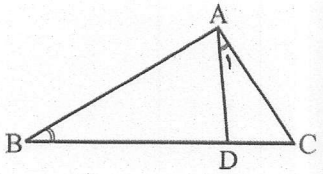
$\overset{\triangle}{ABH}: AH^2+BH^2=AB^2 \rightarrow ۴^2+BH^2=۸^2 \rightarrow BH^2=۴۸ \rightarrow BH=۴\sqrt{۳}$

$AB^2=BH\times BC \rightarrow ۸^2=۴\sqrt{۳}\times BC \rightarrow BC=\frac{۶۴}{۴\sqrt{۳}}=\frac{۱۶\sqrt{۳}}{۳}$

$AB^2+AC^2=BC^2 \rightarrow ۸^2+AC^2=\frac{۱۶^2}{۳} \rightarrow AC=\frac{۸\sqrt{۳}}{۳}$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir



۳- در شکل مقابل $\hat{A}_1=\hat{B}$ و $AC=۴$ و $BD=۶$ است. طول BC را به‌دست آورید.

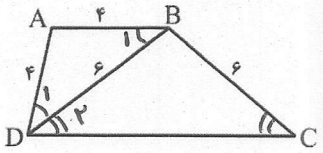
$$\begin{cases}\hat{A}_1=\hat{B}\\ \hat{C}=\hat{C}\end{cases} \xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACD}\sim\overset{\triangle}{ABC} \to \frac{\overset{۴}{AC}}{BC}=\frac{\overset{BC-BD}{DC}}{\underset{۴}{AC}}=\frac{AD}{AB}$$

$$\to \frac{۴}{BC}=\frac{BC-۶}{۴} \to ۱۶=BC^۲-۶BC$$

$$\to BC^۲-۶BC-۱۶=۰ \to (BC-۸)(BC+۲)=۰$$

$$\to BC=-۲ \text{ غ ق ق}$$

$$BC=۸$$



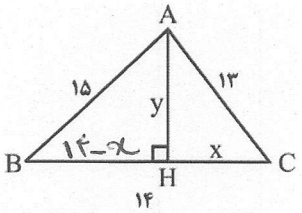
۴- در شکل مقابل، ABCD ذوزنقه است. طول قاعده‌ی CD را به دست آورید.

$$\left.\begin{array}{l} BC=BD \to \hat{D}_۲=\hat{C}\\ AB=AD \to \hat{B}_1=\hat{D}_1\\ AB\parallel DC \text{ و مورب } BD \to B_1=D_۲\end{array}\right\} \to \hat{B}_1=\hat{C}=\hat{D}_1=\hat{D}_۲$$

پس دو مثلث $\overset{\triangle}{ABD}$ و $\overset{\triangle}{BCD}$ به حالت دو زاویه متشابه‌اند:

$$\to \frac{\overset{۴}{AB}}{\underset{۶}{BD}}=\frac{\overset{۴}{AD}}{\underset{۶}{BC}}=\frac{\overset{۶}{BD}}{DC} \to ۴DC=۳۶ \to DC=۹$$

۵- در شکل مقابل، مثلثی به اضلاع ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ رسم شده است. به کمک قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های ABH و ACH، مقادیر x و y را به‌دست آورید و از آنجا مساحت مثلث را محاسبه کنید.



$$\overset{\triangle}{ACH}: x^۲+\cancel{y^۲}=۱۳^۲$$

$$\overset{\triangle}{ABH}: (۱۴-x)^۲+\cancel{y^۲}=۱۵^۲$$

$$\xrightarrow{\ominus} x^۲-(۱۴-x)^۲=۱۳^۲-۱۵^۲$$

$$\to \cancel{x^۲}-۱۹۶-\cancel{x^۲}+۲۸x=۱۶۹-۲۲۵$$

$$\to ۲۸x=۱۹۶+۱۶۹-۲۲۵=۱۴۰ \to x=۵$$

$$\to ۵^۲+y^۲=۱۳^۲ \to y^۲=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \to y=۱۲$$

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}AH\times BC=\frac{۱}{۲}\times ۱۲\times ۱۴=۸۴$$

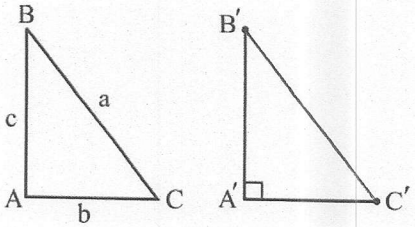
۶- در کتاب حل شود.

۷- در کتاب حل شود.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

۸- با قضیه‌ی فیثاغورس آشنا هستید. این قضیه می‌گوید: اگر در مثلث ABC، زاویه‌ی A قائمه باشد، آنگاه $a^2=b^2+c^2$



الف) عکس این قضیه را بنویسید.

اگر در مثلث ABC، $a^2=b^2+c^2$ باشد، آنگاه مثلث قائم الزاویه است ($\hat{A}=90^\circ$).

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیه‌ی فیثاغورس نیز درست است.

۱) فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطه‌ی $a^2=b^2+c^2$ بین اندازه‌های اضلاع آن برقرار است.

۲) پاره خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به گونه‌ای در نظر بگیرید که $\hat{A}'=90^\circ$ و $A'C'=AC$ و $A'B'=AB$

۳) با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه‌ی پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C'=BC$

$\overset{\Delta}{A'B'C'}: \underbrace{A'B'^2}_{AB^2}+\underbrace{A'C'^2}_{AC^2}=B'C'^2 \to \underbrace{c^2+b^2}_{a^2}=B'C'^2 \to B'C'=a \to B'C'=BC=a$

۴) توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC}\cong\overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A}=90^\circ$

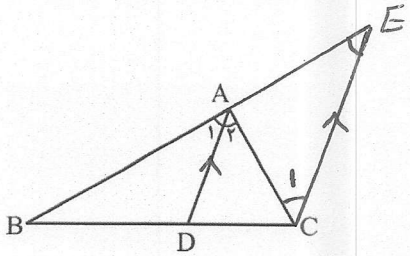
$\begin{cases} A'B'=AB=c \\ A'C'=AC=b \\ B'C'=BC=a \end{cases} \xrightarrow{(ض ض ض)} \overset{\Delta}{A'B'C'} \cong \overset{\Delta}{ABC} \xrightarrow{\text{اجزاء متناظر}} \hat{A}=\underbrace{\hat{A}'}_{90} \Rightarrow \hat{A}=90^\circ$

ج) قضیه‌ی فیثاغورس و عکس آن را به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان نمایید.

یک مثلث قائم الزاویه است اگر و تنها اگر مربع ضلع بزرگتر، برابر مجموع مربع های دو ضلع دیگر باشد.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir



* کاربردهای تشابه

۱- قضیه‌ی نیمسازهای زوایای داخلی: در هر مثلث، نیمساز داخلی هر زاویه، ضلع مقابلش را به نسبت اضلاع زاویه تقسیم می‌کند:

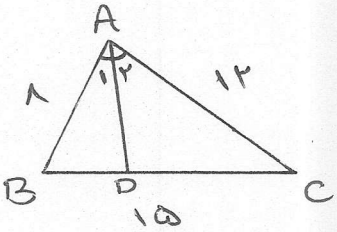
ح: $\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

برهان: از C خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در E قطع کند:

$AD \parallel CE \begin{cases} \xrightarrow{\text{مورب } BE} \hat{A}_1=\hat{E} \\ \xrightarrow{\text{مورب } AC} \hat{A}_2=\hat{C}_1 \end{cases} \xrightarrow{\hat{A}_1=\hat{A}_2} \hat{C}_1=\hat{E} \rightarrow AC=AE$ (1)

$\overset{\triangle}{BCE}: AD \parallel CE \xrightarrow{\text{جزء به جزء}} \frac{BD}{DC}=\frac{BA}{\underset{(1)}{\boxed{AE}}}=\frac{BD}{CD}=\frac{AB}{AC}$

☑ مثال: سه ضلع مثلثی ۸ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌مترند. اندازه‌ی پاره‌خط‌هایی که نیمساز داخلی زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث بر ضلع مقابل آن پدید می‌آورد را بیابید.



ح: BD و CD = ?

نیمساز زاویه‌ی بزرگ‌تر، روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر یعنی AD را رسم می‌کنیم:

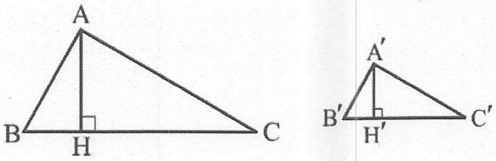
قضیه نیمساز: $\frac{BD}{\underset{15-BD}{CD}}=\frac{\overset{2K}{AB}}{\underset{3K}{AC}} \rightarrow \frac{BD}{15-BD}=\frac{2}{3} \rightarrow 3BD=30-2BD$

$\rightarrow 5BD=30$

$\rightarrow BD=6$

$BD+CD=15 \rightarrow 6+CD=15 \rightarrow CD=9$

۲- نسبت ارتفاع‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است.

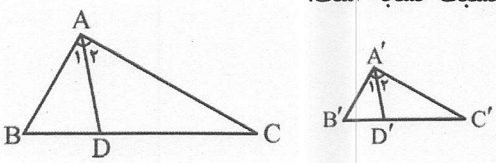


ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{AH}{A'H'}=K$

$\begin{cases} \hat{H}=\hat{H}'=90 \\ \hat{C}=\hat{C}' \text{ ط.ف} \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{A'C'H'} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{AH}{A'H'}=\underset{K}{\frac{AC}{A'C'}}=\frac{CH}{C'H'} \Rightarrow \frac{AH}{A'H'}=K$

۳- نسبت نیمسازها: در دو مثلث متشابه، نسبت نیمسازهای نظیر برابر با نسبت تشابه است.



ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{AD}{A'D'}=K$

طبق فرض: $\hat{A}=\hat{A}' \rightarrow \hat{A}_2=\hat{A}'_2$ (1)

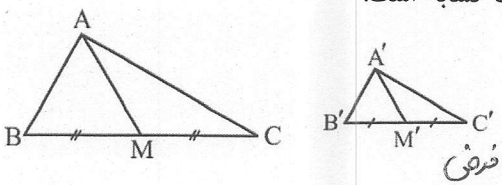
$\begin{cases} \hat{A}_2=\hat{A}'_2 \ (1) \\ \hat{C}=\hat{C}' \end{cases} \xrightarrow{\text{ز ز}} \overset{\triangle}{ACD} \sim \overset{\triangle}{A'C'D'} \rightarrow$

$\rightarrow \frac{AD}{A'D'}=\underset{K}{\frac{AC}{A'C'}}=\frac{CD}{C'D'} \rightarrow \frac{AD}{A'D'}=K$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

۴- نسبت میانه‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت میانه‌های نظیر برابر با نسبت تشابه است.



ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{AM}{A'M'} = k$

طبق فرض: $\frac{BC}{B'C'} = k \rightarrow \frac{CM}{C'M'} = k$ ①

$$\begin{cases} \frac{AC}{A'C'} = \frac{CM}{C'M'} = k \\ \hat{C} = \hat{C'} \end{cases} \xrightarrow[\text{و تساوی زاویه بین}]{\text{تناسب دو ضلع}} \overset{\triangle}{ACM} \sim \overset{\triangle}{A'C'M'} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{AM}{A'M'} = \underbrace{\frac{AC}{A'C'}}_{k} = \frac{CM}{C'M'} \Rightarrow \frac{AM}{A'M'} = k$$

۵- نسبت محیط‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت محیط‌ها برابر با نسبت تشابه است.

ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{P}{P'} = k$

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = k \xrightarrow{\text{ویژگی تناسب}} \frac{\overbrace{AB+AC+BC}^{P}}{\underbrace{A'B'+A'C'+B'C'}_{P'}} = k \Rightarrow \frac{P}{P'} = k$$

۶- نسبت مساحت‌ها: در دو مثلث متشابه، نسبت مساحت‌ها برابر با توان دوم نسبت تشابه است.

ف: $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'}$ ح: $\frac{S}{S'} = k^2$

$$\frac{S}{S'} = \frac{\frac{1}{2}a.h}{\frac{1}{2}a'.h'} = \underbrace{\frac{a}{a'}}_{k} \times \underbrace{\frac{h}{h'}}_{k} = k^2 \rightarrow \frac{S}{S'} = k^2$$

نکته: روابط فوق را به صورت مقابل در یک رابطه جمع می‌کنیم:

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{P}{P'} = \frac{h}{h'} = \frac{d}{d'} = \frac{m}{m'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} = k}$$

نکته: روابطی که در بالا در مورد مثلث‌های متشابه مطرح شد را می‌توان در مورد هر دو چندضلعی متشابه نیز مطرح کرد.

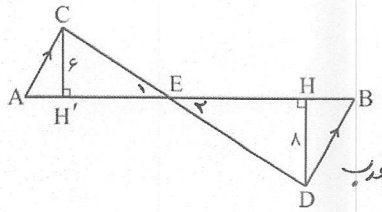
☑ مثال: **مثلث‌های ABC و A'B'C' متشابه‌اند. اگر طول اضلاع مثلث ABC برابر ۵ و ۸ و ۱۱ و محیط مثلث A'B'C' برابر ۶۰ باشد، طول اضلاع مثلث A'B'C' را به‌دست آورید.**

$$\frac{\overset{5}{a}}{a'} = \frac{\overset{8}{b}}{b'} = \frac{\overset{11}{c}}{c'} = \frac{\overset{5+8+11}{P}}{\underbrace{P'}_{60}} \rightarrow \frac{5}{a'} = \frac{8}{b'} = \frac{11}{c'} = \frac{\cancel{24}^{\,2}}{\cancel{60}_{\,5}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \frac{5}{a'} = \frac{2}{5} \rightarrow a' = \frac{25}{2} \\ \frac{8}{b'} = \frac{2}{5} \rightarrow b' = \frac{40}{2} = 20 \\ \frac{11}{c'} = \frac{2}{5} \rightarrow c' = \frac{55}{2} \end{cases}$$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir



☑ مثال: در شکل مقابل، $AC \| BD$ و $AB = ۳۵$ می‌باشد.

الف) نسبت $\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}}$ را بیابید.

$\left\{\begin{array}{l} E_1 = E_2 \\ \hat{A} = \hat{B} \end{array}\right.$ موازی مورب $\xrightarrow{\text{زز}} \overset{\triangle}{ACE} \sim \overset{\triangle}{BDE} \rightarrow k = \frac{CH'}{DH} = \frac{۶}{۸} = \frac{۳}{۴}$ ①

$$\frac{S_{ACE}}{S_{BDE}} = k^۲ \overset{①}{=} \left(\frac{۳}{۴}\right)^۲ = \frac{۹}{۱۶}$$

ب) با توجه به اندازه‌ها، S_{BDE} چقدر است؟

$\frac{\overset{۳۵-EB}{AE}}{EB} = k = \frac{۳}{۴} \rightarrow \frac{۳۵-EB}{EB} = \frac{۳}{۴} \rightarrow ۱۴۰ - ۴EB = ۳EB \rightarrow ۷EB = ۱۴۰$

$\rightarrow EB = ۲۰$

$$S_{BDE} = \frac{۱}{۲} DH \times EB = \frac{۱}{۲} \times ۸ \times ۲۰ = ۸۰$$

☑ تست: اندازه‌ی محیط‌های دو مثلث متشابه ۲۵ و ۴۵ است. اگر مساحت مثلث کوچک‌تر ۵۰ باشد، مساحت مثلث بزرگ‌تر کدام است؟

۱) ۸۱
۲) ۱۶۲ ✓
۳) ۱۳۵
۴) ۷۲

$\frac{P}{P'} = \sqrt{\frac{S}{S'}} \rightarrow \frac{\cancel{۲۵}^{۵}}{\cancel{۴۵}_{۹}} = \sqrt{\frac{۵۰}{S'}} \xrightarrow{\text{توان ۲}} \frac{\cancel{۲۵}^{۱}}{۸۱} = \frac{\cancel{۵۰}^{۲}}{S'}$

$\rightarrow S' = ۲ \times ۸۱ = ۱۶۲$

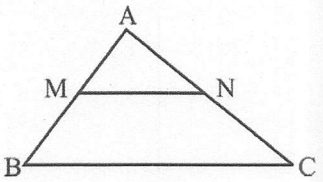
تمرین (صفحه ۴۹ کتاب):

۱- طول ضلع‌های یک مثلث ۱۰ و ۱۲ و ۱۵ سانتی‌متر است و طول بلندترین ضلع مثلثی متشابه آن، ۱۰ سانتی‌متر است. محیط مثلث دوم را به‌دست آورید.

$\frac{\overset{۱۰}{a}}{\underset{۱۵}{a'}} = \frac{P}{\underset{۱۰+۱۲+۱۵}{P'}} \rightarrow \frac{\cancel{۱۰}^{۲}}{\cancel{۱۵}_{۳}} = \frac{P}{۳۷} \rightarrow P = \frac{۷۴}{۳}$

بزرگ‌ترین ضلع مثلث اول

۲- در شکل مقابل $BC \| MN$ است و مساحت ذوزنقه‌ی MNCB هشت برابر مساحت مثلث AMN است. نسبت $\frac{MB}{MA}$ را به‌دست آورید.



$BC \| MN \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AMN} \rightarrow k = \frac{AB}{AM}$ ①

$\frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \frac{k^۲}{۱} \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{\overbrace{S_{ABC} - S_{AMN}}^{S_{MNCB}}}{S_{AMN}} = \frac{k^۲ - ۱}{۱}$

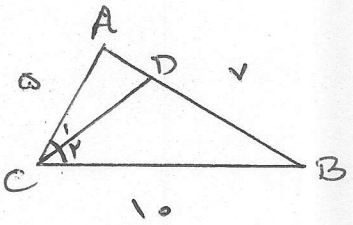
$\rightarrow \frac{\overset{۸}{S_{MNCB}}}{S_{AMN}} = k^۲ - ۱ \rightarrow k^۲ - ۱ = ۸ \rightarrow k^۲ = ۹ \rightarrow k = ۳$ ②

①و② $\rightarrow \frac{AB}{AM} = ۳ \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{AB - AM}{AM} = \frac{۳-۱}{۱} \rightarrow \frac{BM}{AM} = ۲$

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

۳- در مثلث ABC، AB=۷ و AC=۵ و BC=۱۰ است. طول‌های دو قطعه‌ای را که نیمساز زاویه‌ی C روی ضلع مقابل به آن ایجاد می‌کند، به‌دست آورید.

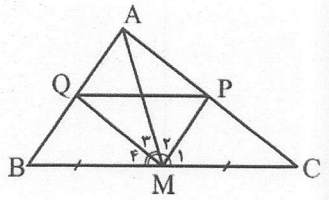


نیمساز CD $\rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CA}{CB} \rightarrow \frac{AD}{7-AD} = \frac{1}{2}$

$\rightarrow 2AD = 7 - AD \rightarrow 3AD = 7 \rightarrow AD = \frac{7}{3}$

$AD + BD = 7 \rightarrow \frac{7}{3} + BD = 7 \rightarrow BD = 7 - \frac{7}{3} = \frac{14}{3}$

۴- در مثلث ABC شکل مقابل، M وسط BC و MP و MQ نیمسازهای زوایای AMC و AMB هستند. ثابت کنید: PQ||BC.



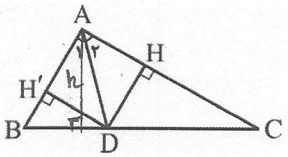
$\triangle ABM$: نیمساز MQ $\rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{MA}{MB}$

$\triangle ACM$: نیمساز MP $\rightarrow \frac{AP}{PC} = \frac{MA}{MC}$ ($MC = MB$)

$\rightarrow \frac{AQ}{QB} = \frac{AP}{PC}$

$\xrightarrow{\text{عکس تالس}} PQ \parallel BC$

۵- در شکل مقابل، AD نیمساز زاویه‌ی A است و عمودهای DH و DH′ نیز رسم شده‌اند.



الف) با در نظر گرفتن BD و CD به عنوان قاعده، نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}h \times BD}{\frac{1}{2}h \times CD} \rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{BD}{CD}$ (۱)

ب) نشان دهید: DH=DH′ و با استفاده از آن بار دیگر نسبت $\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}}$ را بنویسید.

$\begin{cases} AD = AD & \text{وتر مشترک} \\ \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \end{cases} \xrightarrow[\text{حاده}]{\text{وتر و یک زاویه}} \triangle ADH \cong \triangle ADH' \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} DH = DH'$

$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{\frac{1}{2}DH' \times AB}{\frac{1}{2}DH \times AC} \rightarrow \frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{AB}{AC}$ (۲)

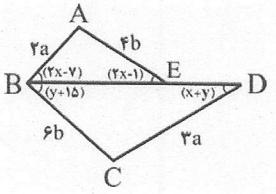
ج) از مقایسه‌ی دو قسمت بالا چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

(۱) و (۲) $\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \rightarrow$ اثباتی دیگر برای قضیه نیمسازها

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**

مدرسه معلم آگاه (مرجع تخصصی جزوات و نمونه سوالات شبه نهایی امتحان نهایی و کنکور) www.mada3.ir

۶- در شکل مقابل می‌دانیم BE=۲DE است. اولاً x و y را به‌دست آورید. ثانیاً نسبت مساحت مثلث BCD به مساحت مثلث ABE را بیابید.



$\frac{BE}{DE}=۲ \xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}} \frac{BE}{BC}=\frac{۲}{۳}$

$\frac{AB}{CD}=\frac{۲a}{۳a}=\frac{۲}{۳}$

$\frac{AE}{BC}=\frac{۴b}{۶b}=\frac{۲}{۳}$

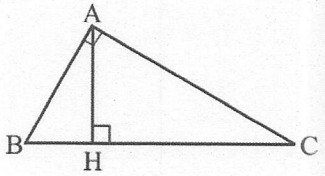
$\xrightarrow[\text{سه ضلع}]{\text{تناسب}} \overset{\triangle}{ABE} \sim \overset{\triangle}{BCD}$

پس زاویه‌ها متناظر برابرند:

$\begin{cases} ۲x-۱=y+۱۵ \\ ۲x-۷=x+y \end{cases} \xrightarrow{\cdots} x=۹ \,,\, y=۲$

$\frac{S_{BCD}}{S_{ABE}}=(\frac{۳}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$

۷- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC($\hat{A}=۹۰^\circ$)، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC}$ است. با توجه به این موضوع،



الف) ثابت کنید: $\frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AB}{BC}\right)^۲ , \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=\left(\frac{AC}{BC}\right)^۲$

$\overset{\triangle}{ABH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}=k^۲=(\frac{AB}{BC})^۲$ (۱)

$\overset{\triangle}{ACH} \sim \overset{\triangle}{ABC} \rightarrow \frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=k'^۲=(\frac{AC}{BC})^۲$ (۲)

ب) با جمع کردن دو طرف تساوی‌های بالا، قضیه‌ی فیثاغورس را نتیجه بگیرید.

(۱) + (۲) $\rightarrow \frac{S_{ABH}}{S_{ABC}}+\frac{S_{ACH}}{S_{ABC}}=(\frac{AB}{BC})^۲+(\frac{AC}{BC})^۲$

$\rightarrow \frac{\overbrace{S_{ABH}+S_{ACH}}^{S_{ABC}}}{S_{ABC}}=\frac{AB^۲+AC^۲}{BC^۲} \rightarrow ۱=\frac{AB^۲+AC^۲}{BC^۲}$

$\rightarrow BC^۲=AB^۲+AC^۲$

۸- در کتاب حل شود.

** جهت مشاوره تحصیلی رایگان و پرسیدن سوالات خود با مشاوران سایت ارتباط بگیرید**